

Ion D. Ion

Gabriela Streinu-Cercel

Adrian P. Ghioca

Neculai I. Nediță

Eugen Cămpu

Nicolae Angelescu

Boris Singer

Romeo Ilie

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a **XII-a**

M1

Filiera teoretică

Profil real

Specializare: matematică-informatică

Filiera vocațională

Profil militar MAPN

Specializare: matematică-informatică



SIGMA

București, 2022

Cuprins

I. Elemente de algebră

Grupuri	5
Legi de compoziție	5
Proprietăți ale legilor de compoziție	9
Clase de resturi modulo n	16
Grupuri	23
Grupuri de permutări	31
Morfisme de grupuri	35
Subgrup. Ordinul unui element	39
*Izometrii într-un plan	46
<i>Teste de evaluare</i>	50
 Inele și corpuri	52
Inele	52
Reguli de calcul într-un inel	57
Corpuri	63
<i>Teste de evaluare</i>	68
 Polinoame	69
Polinoame având coeficienți într-un corp comutativ	69
Împărțirea cu rest a polinoamelor	77
Calculul valorilor unui polinom. Schema lui Horner	82
Relația de divizibilitate pentru polinoame	88
Rădăcini ale polinoamelor. Relațiile lui Viète	99
Ecuații algebrice având coeficienți numerici (în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)	111
<i>Teste de evaluare</i>	119

II. Elemente de analiză matematică

Primitive	121
Probleme care conduc la noțiunea de integrală	121
Primitive și integrala nedefinită a unei funcții. Primitive uzuale.....	126
<i>Teste de evaluare</i>	<i>134</i>
 Integrala definită.....	135
Integrale definite	135
Proprietăți ale integralei definite. Integrarea funcțiilor continue	142
Proprietatea de medie a integralei. Existența primitivelor unei funcții continue	148
Metode de calcul al integralelor definite. Integrarea funcțiilor raționale	155
Metode de calcul al integralelor definite. Integrarea prin părți și schimbarea de variabilă	160
<i>Teste de evaluare</i>	<i>169</i>
 Aplicații ale integralei definite	170
Aria unei suprafețe plane	170
Volumul unui corp de rotație	174
Calculul unor limite de șiruri folosind integrala definită.....	177
<i>Teste de evaluare</i>	<i>181</i>
 Probleme recapitulative	182
 Probleme de tip bacalaureat	191
 Teme de sinteză pentru pregătirea examenului de bacalaureat	202
 <i>Indicații și răspunsuri</i>	<i>217</i>



Cum se introduc elementele cu care se operează și cum se citește rezultatul operației în calculatorul din imagine?

Grupuri

Legi de compoziție

Pasul decisiv care a marcat trecerea de la aritmetică la algebră a fost înlocuirea operațiilor cu numere, prin operații cu litere (simboluri) reprezentând numere. Ulterior, o treaptă superioară de abstractizare s-a realizat prin folosirea unor simboluri care reprezentau și alte obiecte matematice: mulțimi, funcții, matrice, polinoame...

Definiția unei legi de compoziție

O operație algebrică (binară) pe o mulțime nevidă M combină componentele oricărui cuplu (x, y) de elemente din M și are ca rezultat un element tot din M , notat, de exemplu, cu $x * y$.

Un model pentru acțiunea unei operații este cutia neagră (black box) cu două intrări și o singură ieșire. La cele două intrări pot fi



introduse, într-o ordine precizată, două elemente arbitrare $x, y \in M$ și, de fiecare dată, la ieșire se obține un element $x * y \in M$, unic determinat de cuplul (x, y) . Se realizează astfel o *corespondență funcțională* $\varphi : M \times M \rightarrow M$, prin care la orice pereche ordonată $(x, y) \in M \times M$ se asociază un element unic determinat $\varphi(x, y) \in M$, notat eventual $x * y$.

Definiție. Fie M o mulțime nevidă. O aplicație

$$\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \mapsto \varphi(x, y),$$

se numește *lege de compoziție (internă)* sau *operație algebrică binară* pe mulțimea M . Elementul $\varphi(x, y) \in M$ se numește *compusul lui x cu y prin φ* (în această ordine!).

M se numește *mulțimea suport* a operației φ .

Mulțimea M înzestrată cu operația φ se notează (M, φ) .

În locul notației funcționale incomode $\varphi(x, y)$, de obicei se folosește fie notația aditivă $x + y$, fie notația multiplicativă $x \cdot y$ sau xy .

În notația aditivă, elementul $x + y$ se numește *suma* lui x cu y , iar legea de compoziție se numește *adunare*. Elementele x, y se numesc *termenii sumei* $x + y$.

Cum acționează o operație?

1) Pentru $a, b \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $a \vee b$ c.m.m.d.c. al lui a și b . Pe $\mathbb{N}^*$ definim operația $(a, b) \rightarrow a \vee b$.

a) Calculați $18 \vee 12$, $(18 \vee 12) \vee 15$ și $18 \vee (12 \vee 15)$.

b) Arătați că $1 \vee a = 1$ și $a \vee a = a, \forall a \in \mathbb{N}^*$.

2) Fie $M = \mathbb{N}^*$. Dacă $a, b \in M$, notăm cu $a \wedge b$ c.m.m.m.c. al lui a și b . Pe M se obține legea de compoziție (internă) $M \times M \rightarrow M, (a, b) \rightarrow a \wedge b$.

a) Calculați $18 \wedge 12$, $(18 \wedge 12) \wedge 15$, $18 \wedge (12 \wedge 15)$.

b) Arătați că $1 \wedge a = a$ și $a \wedge a = a, \forall a \in M$.

c) Verificați că

$$(18 \vee 12) \cdot (18 \wedge 12) = 18 \cdot 12.$$

3) Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ definim

$$a * b = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad a \circ b = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

a) Calculați $4 \circ 5$; $5 \circ 4$; $3 * 4$; $4 * 3$.

b) Arătați că $a * b = \max\{a, b\}$ și $a \circ b = \min\{a, b\}$.

c) Arătați că $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$.

În notația multiplicativă, elementul xy se numește *produsul* lui x cu y , iar legea de compoziție ϕ se numește *înmulțire*. Elementele x, y se numesc *factorii* produsului xy .

Uneori, obligați de tradiție sau din necesitatea de a folosi simultan mai multe legi de compoziție, utilizăm notații ca:

$x \circ y, x * y, x \wedge y, x \vee y, x \perp y, x \top y, x \oplus y$ etc.

Expresia $x * y$ se citește „ x compus cu y ” (sau „ x stea y ”) și reprezintă rezultatul acțiunii operației „ $*$ ” asupra cuplului (x, y) .

EXEMPLE

... de legi de compoziție.

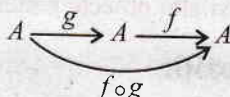


1) Adunarea și înmulțirea numerelor naturale asociază fiecărei perechi ordonate de numere naturale (x, y) suma lor $x + y$, respectiv produsul lor xy .

2) Adunarea și înmulțirea matricelor pătratice de ordin n asociază fiecărei perechi ordonate (A, B) de matrice din $M_n(\mathbb{R})$ suma $A + B \in M_n(\mathbb{R})$, respectiv produsul $AB \in M_n(\mathbb{R})$.

3) Compunerea funcțiilor

Fie A o mulțime nevidă și $\mathcal{F}(A) = \{f \mid f: A \rightarrow A, f \text{ funcție}\}$. Dacă $f, g \in \mathcal{F}(A)$, funcția $f \circ g: A \rightarrow A$, definită prin $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, se numește *compusa lui f cu g* (în această ordine).



Fie $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ o mulțime finită cu n elemente. Acțiunea unei legi de compoziție ϕ pe M poate fi descrisă prin *tabla Cayley* a operației ϕ . Când n este suficient de mic, tabla operației constituie un instrument eficace de studiu.

Cayley Arthur (1821-1895), matematician englez, profesor la Cambridge, cercetător în domeniul teoriei matricelor și determinantilor; a introdus calculul simbolic, teoria grupurilor, ecuații diferențiale, astronomia sferică

Tabla operației ϕ (tabla lui Cayley) pe mulțimea M este un tabel cu linii și coloane corespunzătoare elementelor mulțimii M . La intersecția liniei a_i cu coloana a_j din tabla lui Cayley se află compusul lui a_i cu a_j prin operația ϕ .

ϕ	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n
a_1						
a_2						
$\vdots$						
a_i				$\phi(a_i, a_j)$		
$\vdots$						
a_n						

În notație multiplicativă avem:

$\cdot$	a_1	...	a_j	...	a_n
a_1	$a_1 a_1$	...	$a_1 a_j$	...	$a_1 a_n$
$\vdots$					
a_i	$a_i a_1$	...	$a_i a_j$	...	$a_i a_n$
$\vdots$					
a_n	$a_n a_1$	...	$a_n a_j$	...	$a_n a_n$

4) Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Notăm cu M mulțimea tuturor submulțimilor lui A (inclusiv cea vidă) $M = \{X \mid X \subseteq A\}$

a) Câte elemente are mulțimea M ?

b) Considerând pe M legile de compoziție

$M \times M \rightarrow M, (X, Y) \rightarrow X \cup Y$ și

$M \times M \rightarrow M, (X, Y) \rightarrow X \cap Y$,

calculați $X \cup Y, X \cap Y, X \cap (Y \cup Z)$ și

$(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ dacă $X = \{1, 2\}$,

$Y = \{2, 3, 4\}$ și $Z = \{5, 3\}$.

c) Arătați că $\emptyset \cup X = X, A \cap X = X, \forall X \in M$.

5) Fie $\mathcal{M} = \{X \mid X \subset A\}$ mulțimea submulțimilor lui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dacă $X, Y \in \mathcal{M}$, fie $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ (diferența simetrică a lui X și Y). Considerăm pe $\mathcal{M}$ legea de compoziție $M \times M \rightarrow M, (X, Y) \rightarrow X \Delta Y$.

a) Calculați $X \Delta Y$ și $X \Delta X$, dacă

$X = \{1, 2, 3, 5\}$ și $Y = \{2, 3, 4\}$.

b) Pentru mulțimile X și Y definite la punctul a) calculați $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

c) Demonstrați că

$\forall X \in \mathcal{M}, \emptyset \Delta X = X$ și $X \Delta X = \emptyset$.

d) Arătați că $\forall X, Y \in \mathcal{M}$.

$(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

6) Construiți tabla legii de compoziție $\phi: M \times M \rightarrow M$, unde $M = \{a, b, c\}$, $\phi((a, a)) = a; \phi((a, b)) = b, \phi((a, c)) = c;$ $\phi((b, a)) = b; \phi((b, b)) = c; \phi((b, c)) = a;$ $\phi((c, a)) = c; \phi((c, b)) = a; \phi((c, c)) = b$.

7) Construiți tabla legii de compoziție $\phi: M \times M \rightarrow M, \phi(x, y) = |x - y|$, unde $M = \{0, 1, 2, 3\}$.

8) Fie $M = \{\emptyset, X, Z, Y\}$ mulțimea părților lui $A = \{1, 2\}$, unde $X = \{1\}, Y = \{2\}, Z = \{1, 2\}$.

Completați tablele legilor de compoziție „ $\cup$ ”, „ $\cap$ ” și „ Δ ” (reuniunea, intersecția și diferența simetrică).



Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A = \{1, 2, \dots, n\}$. O funcție $f: A \rightarrow A$ poate fi descrisă în acest caz printr-un tabel cu două linii:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(i) & \dots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Evident, f este funcție bijectivă dacă și numai dacă în a doua linie apare o singură dată fiecare dintre numerele $1, 2, \dots, n$.

Pentru $A = \{1, 2\}$, mulțimea $\mathcal{F}(A) = \{\varphi \mid \varphi: A \rightarrow A\}$ este formată din elementele:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tabla operației de compunere a funcțiilor din $\mathcal{F}(A)$ este prezentată alăturat.

De exemplu, $f \circ h = g$, pentru că $(f \circ h)(1) = 1 = g(1)$ și $(f \circ h)(2) = 1 = g(2)$. În tablă, la intersecția liniei lui f cu coloana lui h apare funcția g .

$\circ$	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h

Parte stabilă. Lege de compoziție indusă.

Definiție. Fie M o mulțime și „ $*$ ” o lege de compoziție pe M . O submulțime nevidă H a lui M se numește *parte stabilă* în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” dacă:

$$\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H.$$

Dacă H este o parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”, atunci restricția lui „ $*$ ” la $H \times H$ ia valori în H . Putem defini pe H o lege de compoziție pe care o vom nota tot cu „ $*$ ”, deși este numai restricția operației „ $*$ ” de pe G . Este de dorit să nu facem confuzia între operația „ $*$ ” de pe G și cea de pe H , deși folosim aceeași notație.



1) Mulțimea $2\mathbb{Z} = \{2q \mid q \in \mathbb{Z}\}$ a numerelor întregi pare este stabilă în raport cu operația de adunare a numerelor întregi.

2) Fie $A = \{1, 2, \dots, n\}$ și $\mathcal{F}_A = \{f \mid f: A \rightarrow A\}$. Fie $H = \{f \in \mathcal{F}(A) \mid f(n) = n\}$. Altfel spus, H este mulțimea funcțiilor $f: A \rightarrow A$ care fixează pe n . Atunci H este o parte stabilă a lui $\mathcal{F}(A)$ în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

Într-adevăr, dacă $f, g \in H$, atunci $f(n) = n$ și $g(n) = n$. Rezultă că $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = n$, deci $f \circ g \in H$.

3) Mulțimea $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ față de adunarea și înmulțirea matricelor.

Într-adevăr, fie $A, A' \in H$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$; atunci $A + A' = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix} \in H$, $AA' = \begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in H$.

4) Intervalele reale $(0, \infty)$ și $[0, \infty)$ sunt părți stabile ale lui $\mathbb{R}$ înzestrate cu operațiile de adunare și înmulțire. Intervalul $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ este stabil la adunare dar nu este stabil la înmulțire pentru că $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \notin \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Recunoașterea (identificarea) unor părți stabile în raport cu o lege de compoziție.

9) Fie $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, ab = 1 \right\}$.

Arătați că H este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

10) Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F}(A) = \{f \text{ funcție} \mid f: A \rightarrow A\}$ și $H = \{f \in \mathcal{F}(A) \mid f(3) = 3\}$.

Arătați că H este o parte stabilă a lui $\mathcal{F}(A)$ în raport cu operația de compunere a funcțiilor. Câte elemente are H ?

11) Arătați că intervalul $H = [0, 1]$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația de înmulțire a numerelor reale.

12) Determinați submulțimile finite H ale lui $\mathbb{R}$ stabile în raport cu înmulțirea numerelor reale.

13) Arătați că $H = \{1, i, -1, -i\}$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu operația de înmulțire a numerelor complexe.

- 1. Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se definește legea de compoziție $\varphi : M \times M \rightarrow M$, $\varphi(x, y) = |x - y|$. Alcătuiți tabla operației φ .

- 2. Fie pe $\mathbb{R}$ operația „ $*$ “, $x * y \stackrel{\text{def}}{=} x + y + xy$.

Arătați că intervalul $H = [-1, \infty)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „ $*$ “.

- 3. Pe $\mathbb{N}$ se definesc legile „ $\vee$ “ și „ $\wedge$ “ prin $a \vee b = \text{c.m.m.d.c.}\{a, b\}$ și $a \wedge b = \text{c.m.m.m.c.}\{a, b\}$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.

Arătați că $H = \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ divide } 12\}$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{N}$ în raport cu legile „ $\vee$ “ și „ $\wedge$ “ și alcătuiți tablele operațiilor induse pe H .

- 4. Arătați că mulțimea $2\mathbb{Z} + 1 = \{2q + 1 \mid q \in \mathbb{Z}\}$ a numerelor impare este stabilă în raport cu operația de înmulțire a numerelor întregi.

- 5. Fie $\mathcal{M}_2(3\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$.

Arătați că $\mathcal{M}_2(3\mathbb{Z})$ este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

- 6. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „ $*$ “ prin $x * y = xy - 2x - 2y + \lambda$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, unde λ este un parametru real.

Determinați λ astfel încât intervalul $H = (2, \infty)$ să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „ $*$ “.

- 7. Fie $A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$, $\mathcal{F}(A) = \{f \mid f: A \rightarrow A\}$

și $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(A)$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}}$,

$$f_3(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Arătați că $H = \{f_1, f_2, f_3\}$ este parte stabilă în raport cu operația de compunere a funcțiilor. Alcătuiți tabla operației induse pe H .

- 8. Arătați că $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$

este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

- 9. Fie H o mulțime cu trei numere complexe distincte și nenule.

Determinați elementele lui H știind că aceasta este o parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe. Generalizare.

- 10. Fie $H = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{există } a, b \in \mathbb{N} \text{ a.î. } x = a^2 + b^2\}$. Este H o parte stabilă a lui $\mathbb{N}$ în raport cu înmulțirea?

- 11. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

Arătați că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

- 12. Fie mulțimea cu trei elemente $M = \{a, b, c\}$.

- a) Câte legi de compoziție se pot defini pe M ?
b) Câte dintre acestea admit ca parte stabilă pe $H = \{a, b\}$? Generalizare.

- 13. Fie A o mulțime și $\mathcal{F}(A) = \{f \mid f: A \rightarrow A\}$.

Arătați că următoarele submulțimi ale lui $\mathcal{F}(A)$ sunt stabile în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

- a) $H_1 = \{f \in \mathcal{F}(A) \mid f \text{ injectivă}\}$;
b) $H_2 = \{f \in \mathcal{F}(A) \mid f \text{ surjectivă}\}$;
c) $H_3 = \{f \in \mathcal{F}(A) \mid f \text{ bijectivă}\}$.

Când $A = \{1, 2, 3\}$, enumerați elementele lui H_3 și alcătuiți tabla operației induse.

- 14. Fie $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A^{-1}\}$.

Arătați că H este o parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

- 15. Fie $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.

Arătați că H este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

- 16. Fie $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

- a) Arătați că H este o parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu operația de înmulțire a numerelor complexe.
b) Reprezentați într-un plan $\mathcal{P}$ raportat la un reper cartezian xOy numerele din H .

- 17. Fie mulțimea $M = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ și legea de compoziție definită astfel $x * y = e^{\ln x \ln y}$.

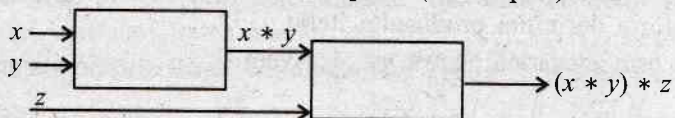
Arătați că M este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „ $*$ “.

Noțiunea de lege de compoziție, așa cum a fost introdusă în paragraful precedent, prezintă un mare grad de generalitate. În definiția unei legi de compoziție se ignoră atât natura elementelor mulțimii suport, cât și modul efectiv în care acționează operația. Singura restricție care s-a pus a fost ca la orice pereche ordonată (x, y) de elemente să se asocieze un element și numai unul. Din acest motiv, pe o mulțime suport se pot defini foarte multe legi de compoziție, în majoritatea lor neinteresante. Astfel, dacă mulțimea suport are doar 3 elemente, atunci se pot defini $3^9 = 19\,683$ legi de compoziție. Din această cauză, studiul legilor de compoziție bazat doar pe definiția lor este foarte sărac în rezultate. S-a dovedit utilă ideea de a studia legi de compoziție cu anumite proprietăți care, în multe cazuri concrete (operații cu numere, operații cu matrice etc.), s-au folosit în efectuarea calculului algebric și în stabilirea unor rezultate remarcabile, importante din punct de vedere teoretic și practic.

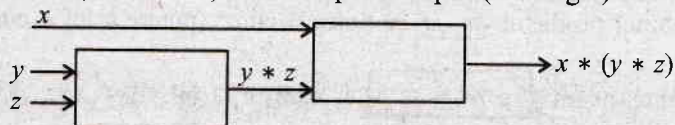
◆ Asociativitate.

Fie M o mulțime nevidă înzestrată cu o lege de compoziție „ $*$ ”. Pentru a compune trei elemente x, y și z , în această ordine, trebuie să mai precizăm (prin paranteze) ordinea în care se efectuează compunerea: $(x * y) * z$ sau $x * (y * z)$.

Prezența parantezelor în expresia $(x * y) * z$ indică următoarea succesiune de calcule: se află mai întâi compusul lui x cu y și apoi acesta se compune (la dreapta!) cu z .



Prezența parantezelor în expresia $x * (y * z)$ impune să aflăm mai întâi $y * z \in M$ și să-l compunem apoi (la stânga!) cu x .



Vom studia în continuare doar legi de compoziție cu proprietatea că $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$.

În acest sens, introducem următoarea noțiune:

Definiție. O lege de compoziție „ $*$ ” se numește asociativă dacă:
 $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$.

EXEMPLE



1) Adunarea și înmulțirea numerelor reale sunt legi de compoziție asociative, pentru că $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \text{ și } (xy)z = x(yz).$$

2) Adunarea și înmulțirea matricelor pătrate cu elemente reale sunt asociative, pentru că $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$(A + B) + C = A + (B + C), (AB)C = A(BC).$$

3) Compunerea pe mulțimea $\mathcal{F}(A)$ a funcțiilor $f: A \rightarrow A$ este asociativă, pentru că $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(A), (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

4) Operația de scădere pe mulțimea $\mathbb{Z}$ nu este asociativă. Exemplu, $(3 - 7) - 1 \neq 3 - (7 - 1)$.

Identificarea unor proprietăți ale legilor de compoziție.

1) Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „ $*$ ” prin $x * y = xy - x - y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Calculați $(x * y) * z$ și $x * (y * z)$ și deduceți că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

2) Pe $\mathbb{C}$ se definește legea de compoziție „ $*$ ” prin $u * v = uv + i(u + v) - 1 - i, \forall u, v \in \mathbb{C}$.

Calculați $(u * v) * w$ și $u * (v * w)$. Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

3) Pe intervalul $M = (0, \infty)$ definim legea de compoziție „ $*$ ” prin $x * y = e^{\ln x \cdot \ln y}, \forall x, y \in M$, unde e este baza logaritmilor naturali. Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

4) Fie legile de compoziție asociative „ $\top$ ” și „ $\perp$ ” definite pe mulțimile M , respectiv N . Pe $M \times N$ definim legea de compoziție „ $*$ ” prin $(x, y) * (x', y') \stackrel{\text{def}}{=} (x \top x', y \perp y')$. Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

5) Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ definim operația „ $*$ ”, $(x, y) * (x', y') \stackrel{\text{def}}{=} (x + x', yy')$. Arătați că „ $*$ ” este asociativă.

6) Pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definim operația „ $*$ ” prin $A * B \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA, \forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că „ $*$ ” nu este asociativă.

b) Arătați că $A * A = O_2$ și

$$(A * B) * C + (B * C) * A + (C * A) * B = O_2, \forall A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$